

Gli appunti contenuti nel presente file sono la sintesi di una lezione e costituiscono un ausilio didattico nell'ambito del corso di *Complementi di Macchine*, tenuto presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Parma.

Il file è disponibile nella pagina web personale del docente.

Non ne è consentita la riproduzione, né la stampa, né la diffusione con altro mezzo.

EQUAZIONE DI EULERO PER LE TURBOMACCHINE

Momento della quantità di moto

Momento angolare nello spazio

Quando il fluido interagisce con le parti mobili di una turbomacchina, produce sulle stesse un'azione dinamica, secondo modalità simili a quelle descritte con l'equazione dell' impulso. Ma, poiché le turbomacchine sono macchine rotative, il primo organo mobile ruota intorno ad un asse: il lavoro scambiato deriva allora dal momento di una forza e da un moto angolare, sicché è necessario estendere il II° principio della dinamica all'impulso del momento ($M \Delta t$) delle forze esterne ed al momento della quantità di moto \mathcal{M}

$$\Delta \mathcal{M} = \left(\sum_j \vec{M}_j \right) \Delta t \quad (1)$$

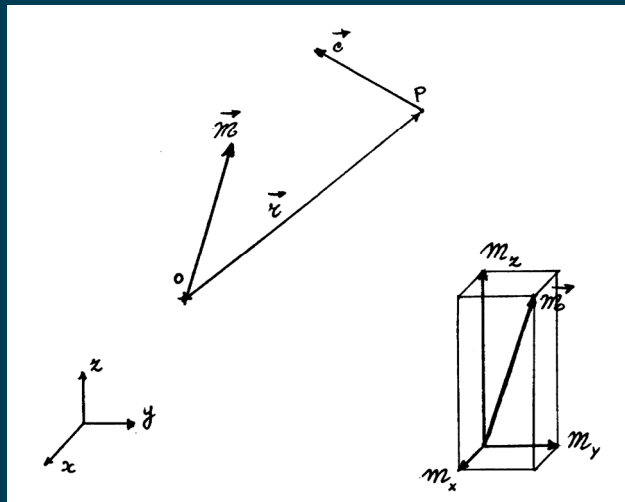


Fig. 1

Si ricorda che, per un corpo puntiforme in P di massa m , il momento angolare rispetto ad un punto fisso O, nel riferimento assoluto, è definito come

$$\vec{\mathcal{M}} \equiv \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \wedge m \vec{c} \quad (2)$$

Il momento della quantità di moto é dunque una grandezza vettoriale, determinata dal modulo e dalla direzione, definita nello spazio da tre angoli: è scomponibile in tre componenti, secondo una terna cartesiana (fig. 1).

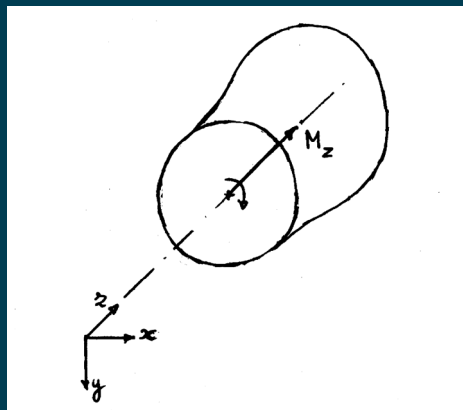


Fig. 2

Per i sistemi continui, nel presente caso il fluido,

$$\mathcal{M} = \int_V \vec{r} \wedge \rho \vec{c} dV \tag{3}$$

la (1) si scrive, utilizzando il metodo lagrangiano per l'intervallo di tempo infinitesimo, nelle tre componenti

$$\begin{cases} d\mathcal{M}_x = \left(\sum_j M_{jx} \right) dt \\ d\mathcal{M}_y = \left(\sum_j M_{jy} \right) dt \\ d\mathcal{M}_z = \left(\sum_j M_{jz} \right) dt \end{cases} \tag{4}$$

Momenti rispetto all'asse del rotore

Uno dei momenti \vec{M}_j , lo si chiami \vec{M}_M , è l'azione che la macchina compie sul fluido. La macchina scambia lavoro con il fluido, essendo la rotazione lungo l'asse z l'unico grado di libertà.

Il lavoro infinitesimo che la macchina compie sul fluido è, in termini generali,

$$d\hat{L}' = \left(\vec{M}_M \bullet \vec{\omega} \right) dt = \left(M_{Mx} \omega_x + M_{My} \omega_y + M_{Mz} \omega_z \right) dt = M_{Mz} \omega_z dt \tag{5}$$

Poiché¹, grazie ai supporti dell'albero che impediscono le corrispondenti rotazioni,

$$\omega_x = \omega_y = 0$$

ai fini dello scambio di lavoro interessa studiare solo il momento M_{Mz} (ed il suo inverso M_{Az} che, in virtù del III° principio della dinamica, il fluido esercita sulle parti mobili della macchina), come chiarito nella fig.2, dove si vede che M_z è il momento torcente sull'albero.

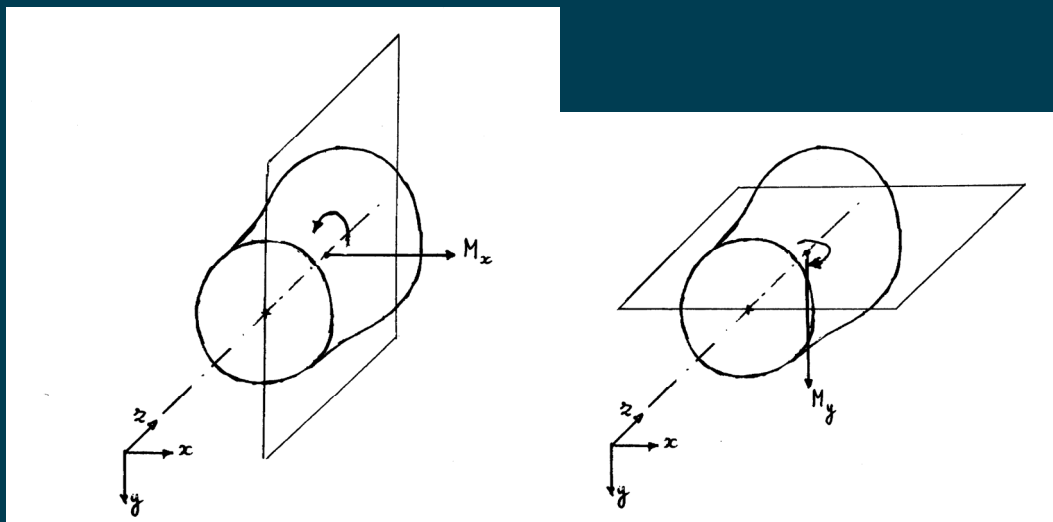


Fig. 3 a

Fig. 3 b

Nondimeno può succedere che siano $M_{Ax} \neq 0$ e $M_{Ay} \neq 0$, con il risultato di produrre momenti flettenti sull'albero (fig.3).

Confrontando la (5) con la (4) si nota che, per determinare il momento torcente $M_{Az} = -M_{Mz}$, interessano le variazioni della sola componente \mathcal{M}_z della quantità di moto del fluido.

Ricordando la definizione di prodotto vettore

¹ A rigore le rotazioni lungo gli assi x ed y possono verificarsi limitatamente alle deformazioni elastiche degli organi di macchina e agli spostamenti radiali dei perni legati allo sviluppo del meato convergente del lubrificante, fenomeni estranei al presente studio.

$$\vec{m} = \frac{\mathcal{M}}{m} = \vec{r} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = (r_x c_y - r_y c_x) \vec{k} + (r_z c_x - r_x c_z) \vec{j} + (r_y c_z - r_z c_y) \vec{i} \quad (6)$$

si rileva che le sole componenti di velocità appartenenti al piano xy , normale all'asse della macchina, determinano \mathcal{M}_z

$$m_z = r_x c_y - r_y c_x \quad (7)$$

e possono riassumersi in un unico vettore, efficace per la produzione del momento torcente, che giace in un piano normale all'asse z , \vec{c}_\perp secondo le convenzioni che si vanno a definire.

Componenti delle velocità nelle turbomacchine

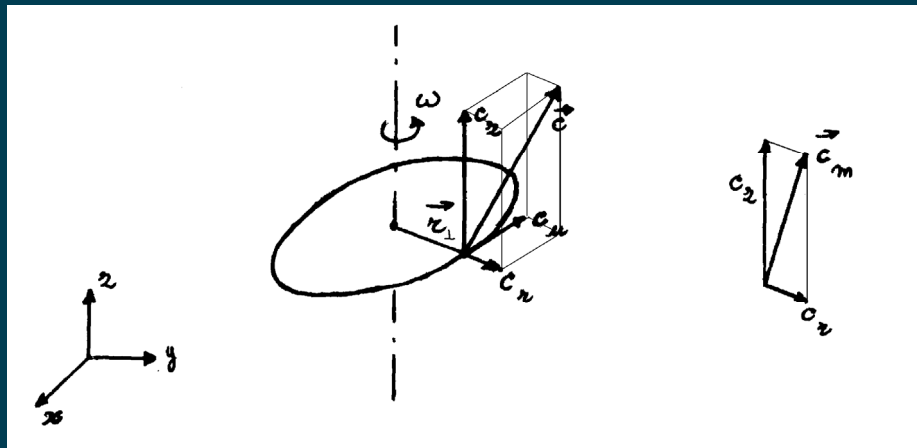


Fig. 4

È uso, nello studio delle turbomacchine, scomporre le velocità nelle tre componenti (fig. 4):

- radiale c_r, w_r > 0 dirette verso l'esterno
- tangenziale c_u, w_u > 0 quando $\vec{c} \cdot \vec{u} > 0, \vec{w} \cdot \vec{u} > 0$
- assiale c_z > 0 nel senso normale del flusso²

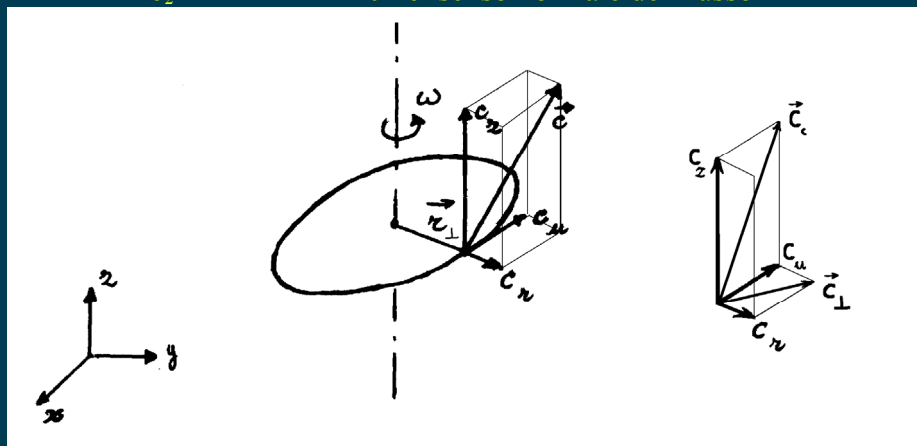


Fig. 5

I canali di flusso interni alla macchina sono rappresentati nelle sezioni:

- meridiana, ottenuta con un piano passante per l'asse di rotazione (piano meridiano), sul quale sono visibili le componenti assolute c_r e c_z , e la velocità meridiana \vec{c}_m (fig. 4);
- trasversale, determinata da un piano perpendicolare all'asse di rotazione (piano trasversale), sul quale sono visibili le componenti assolute c_r e c_u , e la velocità \vec{c}_\perp (fig. 5);

² Non si usa w_z in quanto risulterebbe sempre $w_z=c_z$.

- cilindrica, effettuata con un cilindro coassiale all'asse di rotazione, da sviluppare sul piano del disegno, sul quale sono visibili le componenti assolute c_u e c_z , e la velocità \vec{c}_c (fig. 5).

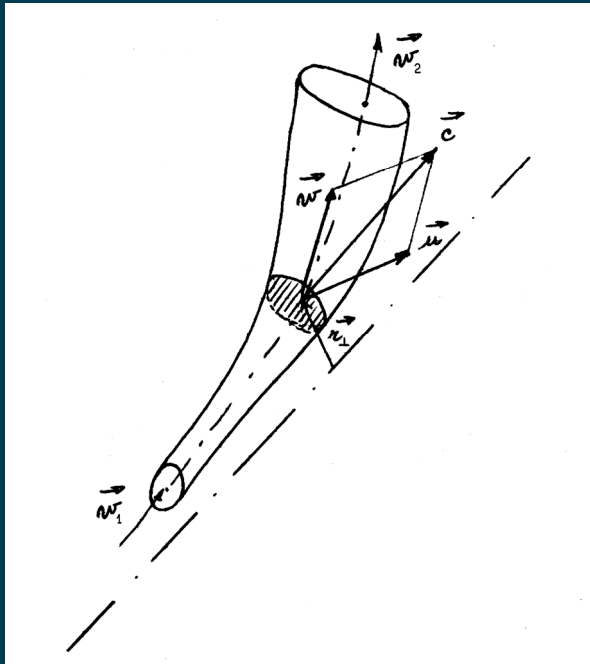


Fig. 6

Utilizzando la scomposizione secondo la terna locale, m_z è determinata dalla sola componente perpendicolare ad r : quindi è sufficiente considerare la sola c_u .

$$m_z = r_x c_y - r_y c_x = r_{\perp} c_u \quad (7 \text{ bis})$$

Ipotesi euleriane

Prima di formulare il teorema del momento angolare per i rotori, è ancora necessario precisare che si ricorre alle ipotesi del moto modimensionale.

Nel moto relativo (moto visto da un osservatore posto sul rotore, e descritto dalla terna mobile) l'ipotesi 1D consiste nel ritenere la \vec{w} tangente alla linea mediana del condotto (fig.6), e tutti i parametri uniformi sulle sezioni trasversali.

La trasformazione che consente di passare al riferimento fisso utilizza l'equazione cinematica del moto relativo

$$\vec{c} = \vec{u} + \vec{w} \quad (8)$$

Eulero³ applicò le ipotesi del moto monodimensionale al moto relativo (1754), giungendo alla formulazione della sua teoria, ancor oggi validissima, per la deduzione della quale occorre considerare il moto in condotti rotorici stretti e lunghi.

Eulero aveva studiato, negli anni immediatamente precedenti, la turbina (detta *eolipila*) di Erone di Alessandria, che effettivamente presentava due condotti di tale aspetto.

I rotori delle turbomacchine moderne hanno tuttavia forma assai diversa. La maggior parte di esse presenta un canale anulare palettato, nel quale i condotti possono pensarsi delimitati dalle superfici di rivoluzione che definiscono il canale anulare e da due palette successive: in fig. 7 è schematizzato un rotore sul quale è rappresentato un solo condotto. Le pale sono presenti in numero normalmente compreso fra 4 e ⁴ circa 200, ma, fatte salve le discontinuità dovute al loro numero discreto, la

³ Leonhard Euler (Basilea 1707- S.Pietroburgo 1783), fu allievo di Giovanni I Bernoulli. Dapprima professore di Fisica a S.Pietroburgo, succedette a Daniele Bernoulli nell'insegnamento delle Matematiche. Fu anche membro dell'Accademia delle Scienze di Berlino per 25 anni. Fu senz'altro lo scienziato più produttivo di scritti della storia (si contano 865 suoi lavori).

⁴ Per macchine a canale aperto (eliche propulsive, aeromotori) molte sono le realizzazioni anche a 2 e 3 pale. Esistono anche bruttissimi esempi di aeromotori monopala!

costruzione è assialsimmetrica, se non altro per evidenti ragioni di equilibratura delle parti rotanti. I condotti non sono, in molti casi, così stretti e lunghi come l'ipotesi 1D richiederebbe.

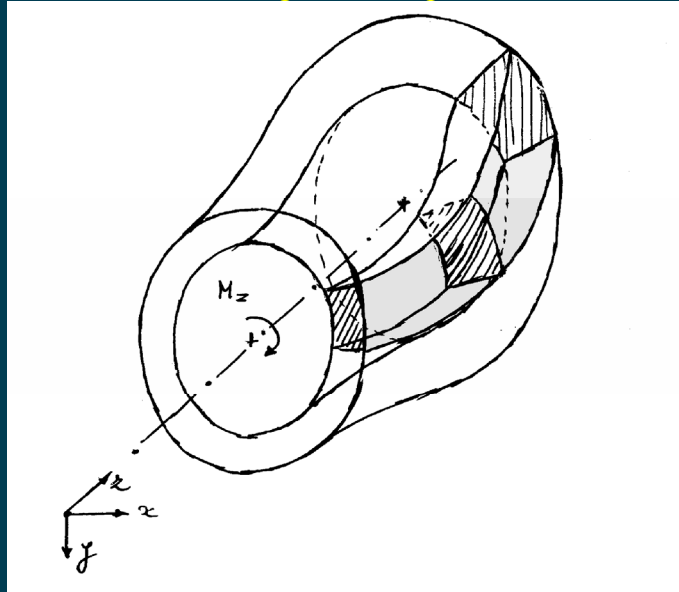


Fig. 7

Inoltre, prescindendo dalle forze viscosse, il fluido può esercitare un momento M_z sulla macchina solo attraverso una pressione differenziale fra i due lati delle pale, il che si traduce, immaginando i condotti funzionalmente eguali fra loro, in una disuniformità di pressione sulle singole sezioni trasversali. Solo se il numero delle pale tende all'infinito le disuniformità possono annullarsi, perciò l'ipotesi euleriana viene associata al caso ideale di infinite pale. Sarebbe anche necessario aggiungere, al caso di limitato sviluppo radiale delle pale.

Si scrive l'equazione di bilancio in forma euleriana per un volume di controllo che comprende l'intera parte del rotore attraversata dal fluido (fig. 8).

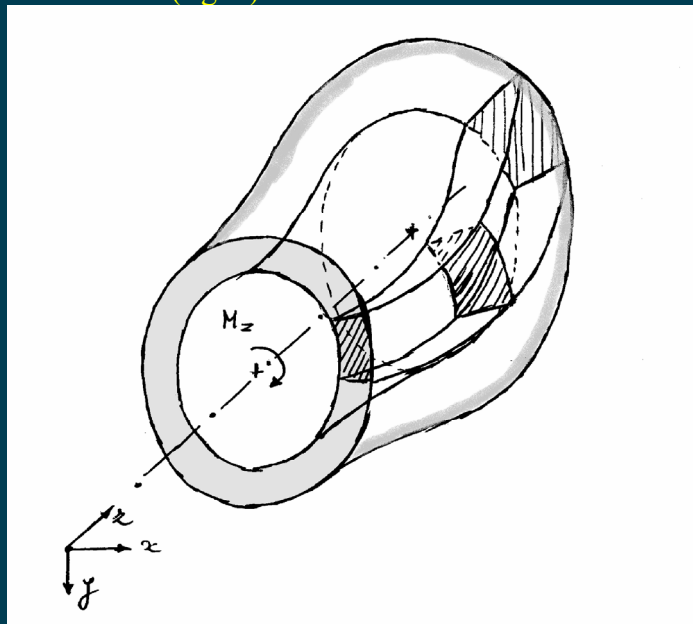


Fig. 8

Le superfici permeabili Ω_1 e Ω_2 sono superfici di rivoluzione (fig. 9): è sempre possibile tracciarle tali, almeno fuori dalla zona occupata dalle pale, grazie a quanto osservato circa la simmetria assiale dei rotori. Sono comprese anche le superfici impermeabili, adiacenti alle superfici di rivoluzione che delimitano il canale internamente ed esternamente, e alle superfici di tutte le pale. A causa della suddivisione fra i canali interpallari, il volume di controllo può risultare non internamente connesso.

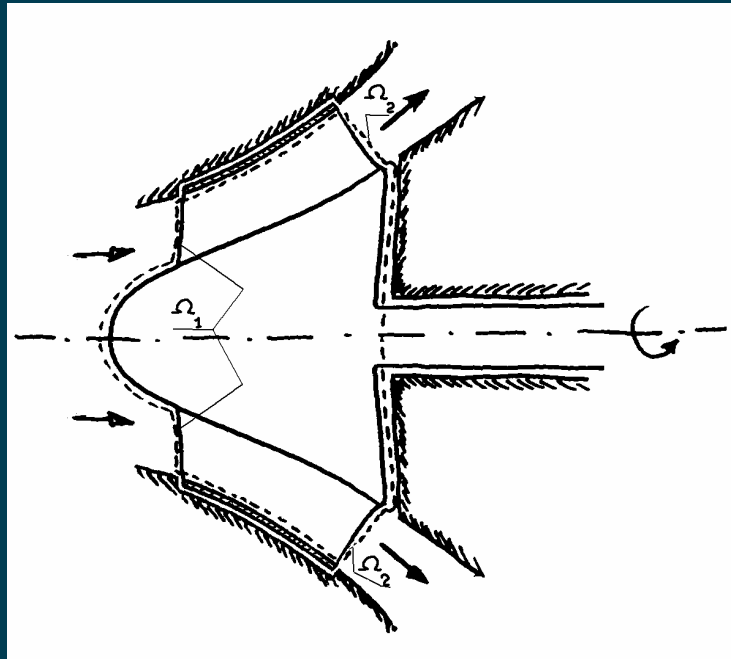


Fig. 9

L'equazione del momento della quantità di moto si scrive perciò:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{momento della} \\ \text{q. di moto che entra} \\ \text{nel sistema attraverso} \\ \text{la sup. permeabile} \\ \text{nel tempo } dt \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{momento della} \\ \text{q. di moto che esce} \\ \text{dal sistema attraverso} \\ \text{la sup. permeabile} \\ \text{nel tempo } dt \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{momento ris.} \\ \text{delle forze} \\ \text{esterne agenti} \\ \text{sul sistema} \end{array} \right\} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{accumulo di} \\ \text{momento angolare} \\ \text{nel sistema durante il} \\ \text{tempo } dt \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$\dot{\mathcal{K}}_{ez} dt - \dot{\mathcal{K}}_{uz} dt + [M_{Vz} - M_{Az} + M_{\Omega z}] dt = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \rho |\vec{r}_\perp| c_u dV \right) dt$$

Nel riferimento assoluto

$$\dot{\mathcal{K}} = \int_\Omega \vec{r} \wedge \rho \vec{c} (\vec{c} \cdot \vec{n}) d\Omega \quad (10)$$

e, indicando nel seguito semplicemente con r la distanza dall'asse z , cioè $|\vec{r}_\perp|$, la componente lungo z del flusso di momento angolare si riduce a

$$\dot{\mathcal{K}}_z = \int_\Omega r \rho c_u (\vec{c} \cdot \vec{n}) d\Omega \quad (11)$$

Sotto le ipotesi del moto 1D, per estensione radiale sufficientemente piccola

$$\dot{\mathcal{K}} = \dot{m} r c_u \quad (12)$$

Analogamente a quanto fatto per l'impulso delle forze, si scrivono i momenti corrispondenti:

- Momento risultante delle forze di volume: operando nel sistema di riferimento fisso esiste solo il momento della forza di gravità

$$M_{Vz} = M_{gz} = g \int_V \rho x dV \quad (13)$$

L'integrale è nullo per qualunque distribuzione di massa simmetrica rispetto al piano yz : quindi per ogni flusso uniformemente distribuito su qualunque circonferenza. Non è invece nullo per il

singolo condotto.

Si pone nel seguito

$$M_{Vz} = 0$$

condizione soddisfatta dalla quasi totalità delle turbomacchine, con l'eccezione di alcune turbine idrauliche parzializzate (PELTON monogetto ad asse orizzontale, MICHELL-BANKI).

- Momento delle forze di pressione sulle superfici permeabili:

$$M_{\Omega z} = \int_{\Omega_1} (\vec{r} \wedge p\vec{n})_z d\Omega - \int_{\Omega_2} (\vec{r} \wedge p\vec{n})_z d\Omega \quad (14)$$

Si osserva che, avendo definito le Ω come superfici di rivoluzione, i versori \vec{n} hanno giacitura meridiana

$$\vec{n} = \vec{n}_m$$

e quindi i momenti elementari delle forze di pressione rispetto all'asse z

$$dM_{\Omega z} = r p n_u d\Omega \quad (15)$$

sono nulli, e nullo è di conseguenza $M_{\Omega z}$, anche se si considera un volume di controllo esteso solo su un arco (come un singolo condotto interpolare) anzichè sull'intera circonferenza.

- Momento risultante delle forze esercitate dal fluido sulle superfici impermeabili,

$$M_{Az} = M_{pz} + M_{\tau z} \quad (16)$$

è proprio il momento torcente motore che produce il lavoro tecnico, quindi ciò che l'equazione cercata si propone di calcolare.

Equazione del lavoro per i rotori

Limitando l'analisi al caso stazionario⁵, dalla (11) si ricava per il momento euleriano:

$$M_\infty = M_{Az} = \dot{\mathcal{K}}_{1z} - \dot{\mathcal{K}}_{2z} + \underbrace{\dot{\mathcal{M}}_{Vz}}_{=0} + \underbrace{\dot{\mathcal{M}}_{\Omega z}}_{=0} \quad (17)$$

dove si è chiamata con 1 la stazione di ingresso nel rotore e con 2 la stazione di uscita.

Combinando con la (12), e considerando che

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

si ottiene

$$M_\infty = \dot{m} (r_1 c_{1u} - r_2 c_{2u}) \quad (18)$$

Moltiplicando ambo i termini della (18) per la velocità angolare della macchina, si ha

$$\omega M_\infty = P_\infty = \dot{m} (\omega r_1 c_{1u} - \omega r_2 c_{2u}) = \dot{m} (u_1 c_{1u} - u_2 c_{2u}) \quad (19)$$

È questa una prima forma dell'equazione cercata, che ben mette in rilievo come la potenza scambiata sia funzione della deviazione della corrente, della velocità della macchina e della portata massica.

Dividendo per la portata si ottiene il lavoro tecnico specifico (per unità di massa)

$$L_\infty = \frac{P_\infty}{\dot{m}} = u_1 c_{1u} - u_2 c_{2u} \quad (20)$$

⁵ Nelle turbomacchine i casi in cui si considera in qualche modo la non stazionarietà del moto sono limitati ai sovralimentatori dei MCI ed al funzionamento anomalo dei compressori. Si può qui notare che, sebbene si faccia un uso generalizzato dell'equazione di Eulero basata sull'analisi stazionaria, il moto attraverso le palettature presenta sempre dei caratteri di non stazionarietà microscopica (turbolenza) e macroscopica. Quest'ultima è evidente quantomeno se si pensa alla propagazione delle scie di una schiera (mobile o fissa) attraverso i vani interpolari della palettatura seguente (fissa o mobile). Al centro di una scia la portata per unità d'area è ridotta, e questo si traduce in una portata pulsante nei singoli canali a valle. Per evitare risonanze i numeri di pale di due schiere successive devono essere diversi, meglio se primi fra loro.

Questo è il lavoro ricavato scrivendo il momento delle forze esercitate dal fluido sulla macchina, quindi corrisponde al lavoro L definito per l'equazione dell'energia, positivo per le macchine motrici. La (20) è la forma canonica dell'equazione di Eulero per i rotorii.

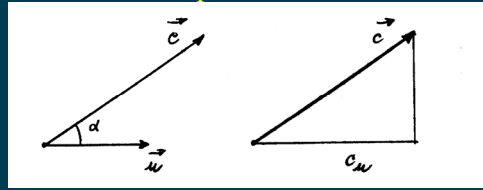


Fig. 10

Chiamando α l'angolo compreso fra i vettori \vec{u} e \vec{c} (fig. 10) è

$$L_\infty = u_1 c_1 \cos \alpha_1 - u_2 c_2 \cos \alpha_2 \tag{21}$$

Nella (21) compaiono a II° membro solo velocità, in modulo e direzione: velocità della macchina e velocità del fluido. Il lavoro specifico non dipende quindi esplicitamente dal fluido, né dalle dimensioni della macchina: può quindi ritenersi indipendente dalle caratteristiche del fluido (es. la densità ρ), almeno finché variazioni di queste caratteristiche (es. la viscosità μ) non impediscano alla macchina di realizzare le medesime velocità. Le dimensioni invece influenzano la potenza, come ben si comprende dalla (19), tenuto conto della (12) e della (8).

La (20) è stata ricavata con soli ragionamenti meccanici (senza ricorrere alla termodinamica), includendo sia forze conservative che dissipative (in particolare M_T). Si presta perciò a trattare sia il funzionamento ideale (dove le forze viscosse sono assenti) che reale. Naturalmente bisogna valutare per altra via i valori delle velocità e degli angoli nei due casi.

Con le eq. (18÷20) si possono inoltre stimare potenze e lavori a partire da misure sperimentali di tipo fluidodinamico, misure condotte per lo più con prove su modelli, sia di parti di macchina che semplicemente di schiere di pale.

Equazione di Eulero per le velocità relative (IIª forma)

Chiamando β l'angolo compreso fra i vettori \vec{u} e \vec{w} (fig. 11), si osserva che

$$c \cos \alpha = u + w \cos \beta \tag{22}$$

relazione che consente di esprimere il lavoro in funzione delle velocità relative: sostituendo nella (21)

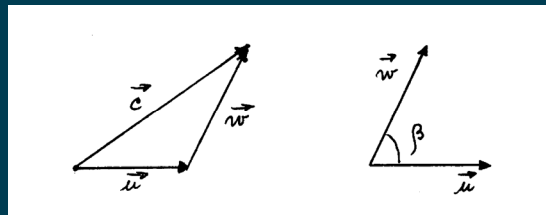


Fig. 11

$$\begin{aligned} L_\infty &= u_1 (u_1 + w_1 \cos \beta_1) - u_2 (u_2 + w_2 \cos \beta_2) = \\ &= (u_1^2 - u_2^2) + (u_1 w_1 \cos \beta_1 - u_2 w_2 \cos \beta_2) \end{aligned} \tag{23}$$

L'ipotesi euleriana comporta che il moto sia rigorosamente 1D, il che significa che le velocità relative siano dirette tangenzialmente alle mediane dei condotti interpalari: cioè, vista l'estensione infinitesima dei condotti idealizzati in direzione circonferenziale, che gli angoli β del flusso coincidano con gli angoli costruttivi delle pale. Siccome nelle macchine reali le pale compaiono in numero finito, questo corrisponde a immaginare che il flusso relativo sia perfettamente guidato.

Questa ipotesi può rappresentare una ragionevole approssimazione della realtà per parecchie macchine, relativamente all'uscita dal rotore, stazione 2: qui le condizioni di flusso sono certamente determinate dalla palettatura rotorica. Lo stesso non può invece dirsi per la stazione 1, locata a monte (non sempre immediatamente) del bordo d'attacco delle pale, là dove, in via del tutto generica, il flusso risente anche e principalmente di altri fattori, per es. dell'effetto di una palettatura statorica a monte.

Quindi all'ingresso la coincidenza dell'angolo β_1 del flusso con l'angolo costruttivo delle pale non è scontato, nemmeno all'interno dell'approssimazione 1D, ma potrà essere, se mai, conseguenza di opportune scelte di progetto, e realizzarsi solo in particolari condizioni di funzionamento.

Equazione della potenza generalizzata

Si osservi che l'eq. (21), e la (23) da essa derivata, non hanno richiesto per la loro deduzione la coincidenza degli angoli β costruttivi e operativi: si è fatto piuttosto ricorso alla ipotesi 1D per semplificare le equazioni, in modo da non far comparire negli sviluppi successivi alla (17) gli integrali che definiscono il flusso di momento angolare nella (11).

Estendendo la trattazione ad un caso più generico, si ottiene combinando la (11) con la (17)

$$P = \int_{\Omega_1} u c_u \rho c_n d\Omega - \int_{\Omega_2} u c_u \rho c_n d\Omega \quad (24)$$

che vale sempre, a patto di risolvere il campo di moto interno alla macchina, onde disporre di distribuzioni di velocità attendibili. Si può anche ricorrere ai valori medi di u (arbitrario) e c_u

$$\langle c_u \rangle = \frac{\int_{\Omega} u c_u \rho c_n d\Omega}{\langle u \rangle \int_{\Omega} \rho c_n d\Omega} \quad (25)$$

che permettono di scrivere qualunque lavoro specifico nella forma

$$L = \langle u \rangle_1 \langle c_u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 \langle c_u \rangle_2 \quad (26)$$

Forma quadratica dell'equazione di Eulero

Applicando il teorema di Carnot ad un generico triangolo delle velocità (fig. 12)

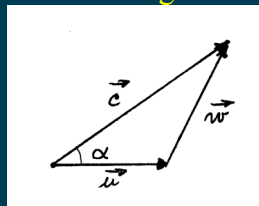


Fig. 12

$$w^2 = u^2 + c^2 - 2uc \cos \alpha \quad (27)$$

e sostituendo nella (21) il termine comprendente il coseno, si ricava

$$L_{\infty} = \frac{1}{2} \left[(u_1^2 + c_1^2 - w_1^2) - (u_2^2 + c_2^2 - w_2^2) \right] \quad (28)$$

che, raggruppando, porta alla forma quadratica dell'equazione di Eulero, come generalmente la si scrive

$$L_{\infty} = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \quad (29)$$

Questa espressione consente di stabilire quale è il senso più conveniente delle variazioni del modulo delle velocità nei rotori.

Per una macchina motrice la velocità periferica dovrebbe diminuire, quindi il raggio di uscita dovrebbe essere minore di quello di ingresso. Ciò non si verifica in tutte le turbine: in alcune, anzi, per motivi legati allo smaltimento di portata, aumenta lievemente. Tuttavia, dove altri vincoli non lo sconsigliano, il flusso può svolgersi prevalentemente dalla periferia verso l'asse di simmetria, onde macchine siffatte prendono il nome di turbine centripete. Le altre sono classificate turbine assiali⁶.

Il modulo della velocità assoluta all'ingresso deve essere maggiore che in uscita, il che si verifica sempre nelle turbomacchine motrici. Ad ogni rotore (fanno eccezione gli aeromotori) deve essere

⁶ Si ricordano anche le turbine Ljungström, costituite da due rotori controrotanti, a flusso radiale diretto verso l'esterno.

anteposto uno statore, con il compito di fornire l'energia cinetica necessaria alla stazione 1. Lo statore trasformerà energia elastica in energia cinetica, e sarà quindi costituito da ugelli.

Osservando la (20) si deduce che gli ugelli devono anche essere orientati in modo da fornire una forte componente tangenziale di velocità, diretta nel senso della velocità periferica del rotore.

Per le velocità relative la (29) illustra la possibilità di sfruttare incrementi di velocità nel moto relativo. Se questo viene attuato, anche la palettatura rotorica è costituita da una schiera acceleratrice.

L'energia specifica rotorica

Integrando l'equazione dell'energia in forma conservativa

$$cdc + gdz = -dL - dh + dq_e$$

fra ingresso e uscita del rotore

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = -L_{12} - (h_2 - h_1) + q_{e12} \quad (30)$$

se si trascura l'energia potenziale, e si suppone il flusso adiabatico (ipotesi molto verosimile per gran parte delle turbomacchine)

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = -L_{12} - (h_2 - h_1) \quad (31)$$

esprimendo il lavoro L_{12} con la formula quadratica di Eulero si ottiene:

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = -\left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}\right) + (h_1 - h_2) \quad (32)$$

che si riduce a

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} \quad (33)$$

Si definisce l'entalpia totale rotorica

$$h_{tR} = h + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} \quad (34)$$

che, nell'ipotesi di flusso adiabatico, si mantiene non solo eguale fra le stazioni 1 e 2, ma costante durante tutto l'attraversamento del rotore, come sancito dalla equazione dell'energia per il riferimento mobile,

$$wdw - udu = -dh + dq_e$$

che porta a

$$dh + wdw - udu = 0 \quad (35)$$

quindi

$$dh_{tR} = 0 \quad (36)$$

Combinando invece la (29) con l'equazione di non conservazione dell'energia meccanica

$$cdc + gdz = -dL - vdp - dL_a$$

si ottiene:

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = -\left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}\right) - \int_1^2 \frac{dp}{\rho} - L_{a12} \quad (37)$$

cioè

$$g(z_2 - z_1) + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = -\int_1^2 \frac{dp}{\rho} - L_{a12} \quad (38)$$

che per fluidi incomprimibili consente di scrivere

$$z_1 + \frac{w_1^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{w_2^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{L_{a12}}{g} \quad (39)$$

Il termine

$$\mathcal{K}_{iR} = z + \frac{w^2 - u^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} \quad (40)$$

che rappresenta l'energia specifica rotorica espressa come altezza (corrispondente al carico totale nel sistema di riferimento fisso), non si conserva, ma sussiste la relazione

$$\mathcal{K}_{iR1} = \mathcal{K}_{iR2} + \frac{L_{a12}}{g} \quad (41)$$

Forme speciali dell'equazione di Eulero

Per le turbomacchine operatrici si preferisce usare il lavoro L' definito positivo quando compiuto dalla macchina sul fluido

$$L' = -L$$

che in questo caso è >0 .

Si ottiene:

➤ I^a forma $L'_\infty = u_2 c_{2u} - u_1 c_{1u} \quad (42)$

➤ II^a forma $L'_\infty = (u_2^2 - u_1^2) + (u_2 w_{2u} - u_1 w_{1u}) \quad (43)$

➤ III^a forma $L'_\infty = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \quad (44)$

Simmetricamente a quanto fatto per le macchine motrici, si osserva che:

- ✓ all'uscita dal rotore esiste una forte componente tangenziale della velocità assoluta diretta nel senso della velocità periferica;
- ✓ l'energia cinetica assoluta in uscita dal rotore deve essere maggiore che in ingresso;
- ✓ dovrà quindi essere disposto un organo statico preposto al recupero di energia cinetica in energia elastica (diffusore), a valle del rotore;
- ✓ lo statore di uno stadio di turbo-operatrice, se esiste, segue il rotore, mentre nelle turbo-motrici lo precede;
- ✓ il rotore vede decelerare il flusso relativo;
- ✓ se esistono variazioni di raggio, queste devono comportare l'allontanamento dall'asse nel senso del flusso (macchine centrifughe).

Le macchine assiali dovrebbero avere raggio costante. Questo non è sempre rigorosamente vero, ma, quando $r_1 = r_2$ tutte le espressioni si possono semplificare come segue.

➤ Turbomotrici assiali

$$L_\infty = u(c_{1u} - c_{2u}) = u \Delta^- c_u \quad (45)$$

$$L_\infty = u(w_{1u} - w_{2u}) = u \Delta^- w_u \quad (46)$$

$$L_\infty = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \quad (47)$$

➤ Turbo-operatrici assiali

$$L'_\infty = u(c_{2u} - c_{1u}) = u \Delta^+ c_u \quad (48)$$

$$L'_\infty = u(w_{2u} - w_{1u}) = u \Delta^+ w_u \quad (49)$$

$$L'_\infty = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \quad (50)$$

Si osserva che:

- ✓ $\Delta c_u = \Delta w_u$
- ✓ è fondamentale, per lo scambio di lavoro, la deviazione del flusso, non potendo contare su variazioni di momento angolare legate a spostamenti radiali;

- ✓ la deviazione del flusso, intuitiva a partire da considerazioni sul teorema dell'impulso del momento nel moto assoluto, è altrettanto importante nel moto relativo: in questo caso non si vede il lavoro, ma occorre pensare alla generazione di un momento M_z attraverso una forza tangenziale prodotta da una variazione di quantità di moto nel riferimento rotante.

Considerazioni sulle superfici di controllo impermeabili

I rotori delle turbomacchine possono essere costruiti a canale aperto o chiuso, nel senso che gli apici delle pale possono essere collegati da una cerchiatura (ingl. *shroud*) che delimita esternamente il canale (fig. 13), oppure essere lasciati liberi (fig. 14).

In quest'ultimo caso il canale viene chiuso, salvo nelle macchine in vena libera (eliche propulsive ed aeromotori), dalla parete interna della cassa, che è una superficie fissa.

Le tensioni tangenziali su questa parete, sebbene non trascurabili nello studio fluidodinamico, non collaborano allo sviluppo del momento M_{Az} , ma concorrono a determinare la variazione di momento angolare del fluido. Bisogna pertanto correggere con opportune funzioni la potenza dello stadio, dopo il calcolo con le formule euleriane.

Se invece le cerchiature esistono, la loro area interna partecipa a ragione al calcolo del momento torcente sull'albero. Si sviluppano però delle forze ritardanti sulla superficie esterna dello scudo, legate all'elevato gradiente di velocità nel meato compreso fra rotore e cassa. La coppia frenante che ne deriva deve essere sommata alle altre perdite, quali attrito sui dischi, effetto ventilante (negli stadi parzializzati), ecc., che producono momenti resistenti fuori dalla zona attraversata dalla portata principale di fluido evolvente.

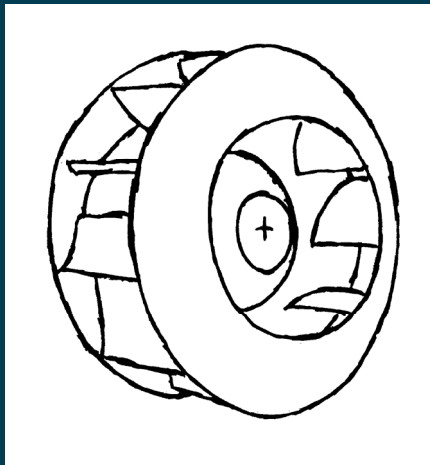


Fig. 13

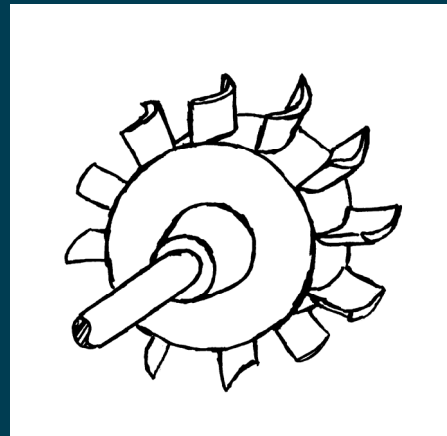


Fig. 14

Queste membrature di chiusura svolgono la duplice funzione di irrigidire strutturalmente le pale, nei confronti delle deformazioni flessionali, e di limitare la portata di fluido che, sfuggendo attraverso i giochi fra rotore e cassa, non compie lavoro nelle turbine, rifluisce invece verso l'aspirazione nelle pompe e nei compressori, dopo aver assorbito lavoro nel rotore.

Le perdite prodotte da questi trafiletti consistono in primo luogo nel fatto che una parte della portata non evolve nella macchina scambiando lavoro come si studia in questo capitolo, ma segue altre strade, e l'energia associata alla portata sfuggita va persa: viene dissipata nei giochi senza possibilità di recupero. Estendendo una dizione derivata dalle macchine idrauliche, queste vengono dette *perdite volumetriche*.

Un secondo effetto si presenta nelle macchine a canale aperto, legato alle differenze di pressione fra le due facce, intradosso (soggetto a sovrappressione) ed estradosso (a pressione relativamente inferiore) delle pale. Il fluido tende a scavalcare l'apice delle pale, spinto dal gradiente di pressione circonferenziale, riducendo la differenza di pressione sulle pale, e quindi la potenza scambiata.