

Gli appunti contenuti nel presente file sono la sintesi di una lezione e costituiscono un ausilio didattico nell'ambito del corso di *Complementi di Macchine*, tenuto presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Parma.

Il file è disponibile nella pagina web personale del docente.

Non ne è consentita la riproduzione, né la stampa, né la diffusione con altro mezzo.

## CONDOTTI FISSI

### **Pressione di Ristagno per Fluidi Comprimitibili**

#### **Definizioni**

La pressione di ristagno è la pressione che si ottiene portando all'arresto in modo reversibile un fluido in movimento. In IDRAULICA non occorrono ulteriori precisazioni, in GASDINAMICA (scienza che studia il moto dei fluidi comprimibili con l'ipotesi di gas ideale) è necessario aggiungere che la trasformazione di arresto sia adiabatica.

La pressione totale è la pressione che corrisponde all'arresto con le modalità appena enunciate, portando inoltre il fluido alla quota di riferimento.

Indicando senza pedice la condizione corrente (in movimento), e con il pedice  $t$  la condizione di ristagno, dall'equazione dell'energia in moto stazionario monodimensionale (1D)

$$c \, dc + g \, dz = -dL - v \, dp - dL_a$$

si ottiene integrando

$$-\frac{c^2}{2} + g(z - z_{ref}) = -\int_s^t v \, dp \quad (1)$$

dove per chiarezza  $s$  indica la pressione statica, cioè la pressione "fisica" del fluido in moto alla velocità  $c$ ,  $z_{ref}$  la quota di riferimento.

Poiché nelle applicazioni di questa teoria alle macchine a fluido il lavoro delle forze di gravità risulta sistematicamente trascurabile rispetto agli altri termini in gioco<sup>1</sup>, non esiste differenza rilevante fra la pressione di ristagno e la pressione totale, ed è quindi abbastanza diffusa l'abitudine di confondere le due, utilizzando per la prima il pedice  $t$ .

#### **Velocità in funzione delle pressioni**

La prima espressione utile si ottiene risolvendo l'integrale a II membro della (1), posto  $z = z_{ref}$ .

Per una trasformazione isentropica (adiabatica reversibile)

$$p v^k = p_t v_t^k = \text{cost}$$

quindi

$$\frac{c^2}{2} = \int_s^t v_t p_t^{\frac{1}{k}} \frac{1}{p^{\frac{1}{k}}} dp = p_t^{\frac{1}{k}} v_t \int_s^t p^{-\frac{1}{k}} dp$$

Risolvendo l'integrale

$$\frac{c^2}{2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} p_t^{\frac{1}{k}} v_t \left[ p_t^{1 - \frac{1}{k}} - p_s^{1 - \frac{1}{k}} \right]$$

e indicando, come d'uso, la pressione statica senza pedice, si ottiene facilmente

$$\frac{c^2}{2} = \frac{k}{k-1} p_t^{1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}} v_t \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_t} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

Ponendo l'equazione in forma canonica

<sup>1</sup> Considerazione non valida per le macchine idrauliche, né, per i fluidi comprimibili, limitatamente a qualche caso applicativo estraneo alle macchine (es. camini).

$$c = \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_t v_t \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_t} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (2)$$

si rileva una grandissima somiglianza con l'equazione di De Saint Venant, che fornisce la velocità di uscita da un ugello

$$c_2 \approx \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (3)$$

Mentre la (2) è un'espressione esatta, almeno nella misura in cui  $k$  può ritenersi costante lungo la trasformazione<sup>2</sup>, la (3) è approssimata perché:

- non tiene conto del lavoro delle forze d'attrito fra la sezione 1 di ingresso e la sezione 2 di uscita, che è presente negli ugelli reali;
- trascura l'energia cinetica – piccola ma non nulla – nella sezione 1.

Grazie all'equazione di stato del gas ideale

$$pv = RT$$

la (2) si può anche scrivere

$$c = \sqrt{\frac{2k}{k-1} R T_t \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_t} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (4)$$

### Numero di Mach in funzione delle pressioni

Ricordando che la velocità del suono è

$$a = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}$$

e che per il gas perfetto risulta

$$a = \sqrt{kRT}$$

nella (4) si riconosce la sua presenza, che permette di scrivere

$$c = \sqrt{\frac{2}{k-1} a_t^2 \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_t} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (5)$$

e quindi

$$\frac{c}{a_t} = La = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_t} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$

Il rapporto  $c/a_t$  fra la velocità del fluido e la velocità del suono in condizioni di ristagno è detto **numero di Laval**: è questo un numero adimensionale che deriva dall'applicazione dell'analisi dimensionale, ma non fornisce più informazione del più noto numero di Mach, ed è quindi poco usato.

Dalla (5) si può risalire al numero di Mach  $c/a$  con semplici passaggi:

<sup>2</sup> È rigorosa per il gas perfetto.

$$Ma = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{k-1} \frac{a_r^2}{a^2} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_t} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} = \sqrt{\frac{2}{k-1} \frac{T_r}{T} \left[ 1 - \frac{T}{T_r} \right]} = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[ \frac{T_r}{T} - 1 \right]}$$

che fornisce

$$Ma = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[ \left( \frac{p_t}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} \tag{6}$$

**Pressione di ristagno in funzione del numero di Mach**

Al contrario della (4), la (6) può essere facilmente invertita

$$\left( \frac{p_t}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2$$

fornendo così due risultati interessanti:

$$\frac{p_t}{p} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{7}$$

$$\frac{T_t}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \tag{8}$$

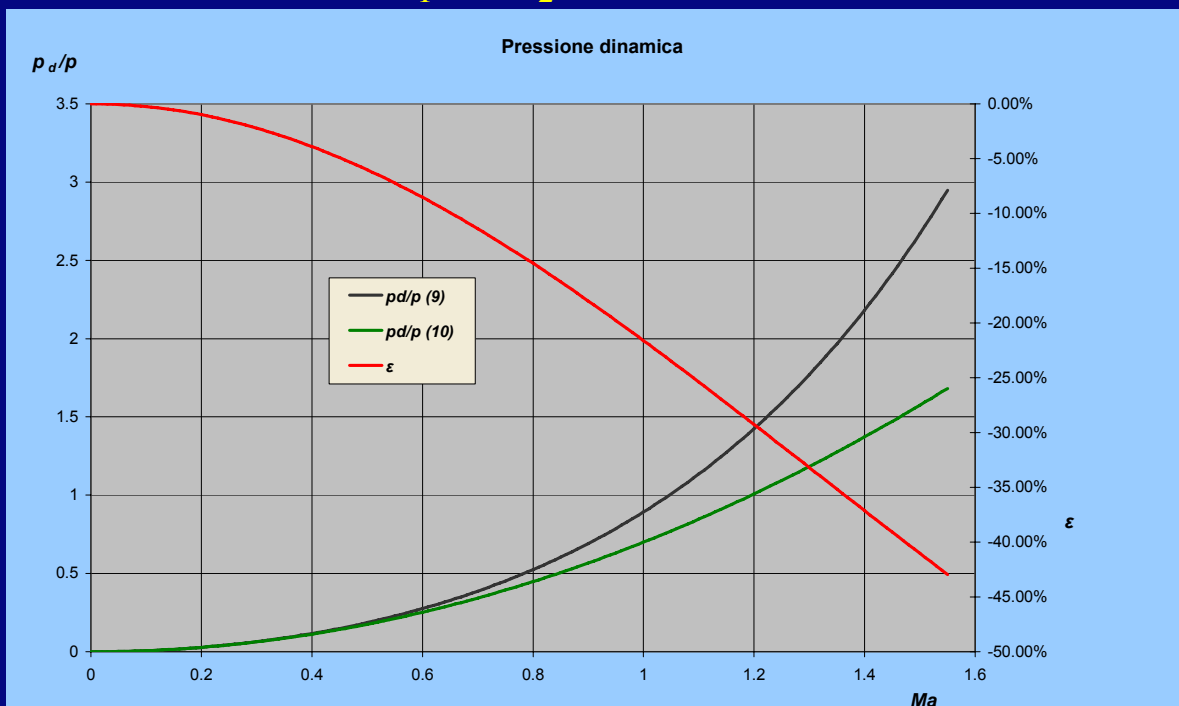


Fig. 1

La pressione dinamica può essere valutata dalla (7)

$$p_d = p_t - p = p \left[ \left( 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1 \right] \tag{9}$$

espressione ben diversa da quella ben nota dei fluidi incomprimibili

$$p_d = \rho \frac{c^2}{2}$$

che, trasformata nelle stesse variabili della (9), si leggerebbe

$$p_d = \rho \frac{a^2 Ma^2}{2} = \rho \frac{k p}{\rho} \frac{Ma^2}{2} = k p \frac{Ma^2}{2} \quad (10)$$

La fig.1 confronta la (9) e la (10) per  $k = 1.4$ , e riporta l'errore percentuale che si commette se si usa la (10) al posto della (9).

L'uso delle equazioni del fluido incomprimibile è normale nel campo delle cosiddette *basse velocità*, cioè per  $Ma \leq 0.3$ .

## **Ugelli e diffusori**

L'equazione di Hugoniot

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{dc}{c} (Ma^2 - 1) \quad (11)$$

indica come devono essere conformati i condotti acceleranti (ugelli) e deceleranti (diffusori).

Per passare alle pressioni basta richiamare l'equazione dell'energia, che con le ipotesi fatte si riduce a

$$c \, dc = -v \, dp$$

e sostituendo si ottiene

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = -v \frac{dp}{c^2} (Ma^2 - 1) = -v \frac{dp}{a^2 Ma^2} (Ma^2 - 1) = -v \frac{dp}{k p v Ma^2} (Ma^2 - 1) = \frac{dp}{p} \frac{1 - Ma^2}{k Ma^2}$$

quindi

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{dp}{k p} \left( \frac{1}{Ma^2} - 1 \right) \quad (12)$$

Tuttavia la (11) e (12) sono fondate su ipotesi che non sempre rappresentano approssimazioni accettabili:

- 1) moto monodimensionale
- 2) flusso adiabatico reversibile
- 3) moto stazionario.

Se sulla 3) non vi sono da fare specifiche osservazioni in questa sede<sup>3</sup>, esistono casi in cui, pur rimanendo nell'ambito di flussi adiabatici, gli effetti dissipativi sono tutt'altro che trascurabili, e casi nei quali gli effetti bidimensionali possono diventare importanti.

### **Ugelli subsonici reali**

La presenza di un gradiente di pressione negativo nel senso del moto produce una conversione di energia da elastica a cinetica, percentualmente più marcata nello strato limite, che di conseguenza tende a ridurre il proprio spessore. Oltre ad andare a vantaggio del rendimento, nel senso che le perdite risultano tendenzialmente modeste anche per condotti dal disegno migliorabile, grazie a questo fatto il tubo di flusso efficace per lo smaltimento di portata ha un andamento assai prossimo a quello geometrico delle pareti, e l'equazione di Hugoniot rappresenta un'ottima approssimazione. Eventuali discrepanze possono essere causate dalla curvatura della mediana (ugelli delle turbine assiali), e possono essere in parte corrette con l'adozione di opportuni valori del rapporto passo/corda.

### **Diffusori subsonici reali**

Al contrario degli ugelli, la presenza di un gradiente di pressione positivo rende difficile l'avanzamento del fluido che si trova nello strato limite, dotato di minore energia cinetica rispetto al

<sup>3</sup> È opportuno ricordare che la stazionarietà del moto è un'astrazione anche per le turbomacchine, se non altro per il fatto che la presenza di più palettature attraversate in successione dal fluido, dotate di moto relativo, comporta che i canali interpalari di tutte, salvo la prima, siano attraversati periodicamente dalle scie delle pale che si trovano a monte, con conseguente riduzione temporanea di portata.

Anche le pale di macchine che non hanno questa caratteristica, come gli aeromotori, operando nello strato limite generato dalla presenza del suolo, subiscono periodiche variazioni della velocità a monte, maggiore mediamente in termini assoluti quando la pala si trova sulla semicirconferenza superiore rispetto alle condizioni incontrate lungo la semicirconferenza inferiore.

bulk-flow. Lo strato limite tende notevolmente ad aumentare di spessore, e se si eccede con l'angolo di divergenza, si produce distacco di vena (fig. 2).

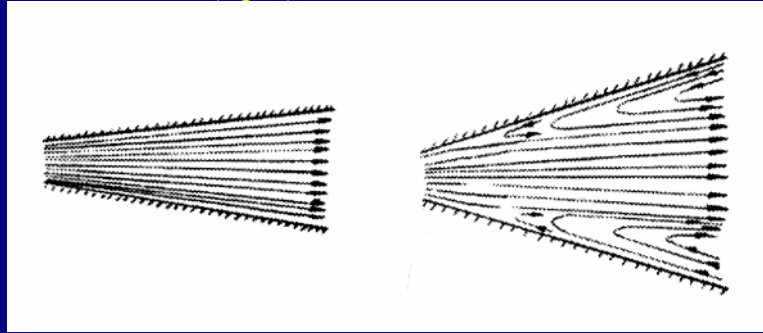


Fig. 2

Se questo si verifica, le equazioni (11) e (12), pur rimanendo approssimativamente valide per il tubo di flusso entro cui scorre la portata che avanza, non risultano più applicabili alla geometria definita dalle pareti del condotto. Fra l'uno e le altre si sono instaurate delle sacche di ricircolazione, che, oltre a vanificare l'incremento d'area ai fini del recupero di pressione, sono notevoli sorgenti di perdite energetiche.

È quindi necessario limitare l'angolo di divergenza (semiangolo al vertice non superiore a  $7\div 8^\circ$ ) per evitare il distacco di vena. Questo fenomeno è fisicamente analogo, ed è prodotto dalle medesime cause dello *stallo*, di cui si parla nella trattazione della teoria alare.

Non è d'altronde conveniente ricorrere ad angoli al vertice troppo piccoli, in quanto, aumentando la lunghezza del condotto per ottenere il medesimo rapporto d'aree, si otterrebbero aumenti indesiderati delle perdite legate all'estensione della cosiddetta *superficie bagnata*.

Nel caso in cui lo spazio a disposizione non consenta di realizzare il necessario rapporto d'aree con l'angolo di divergenza ottimale, si possono adottare alcune tecniche di manipolazione dello strato limite (fig. 3 a e b), o un divergente di grande angolo con setti divisori (*splitters*) interni (fig. 3 c).

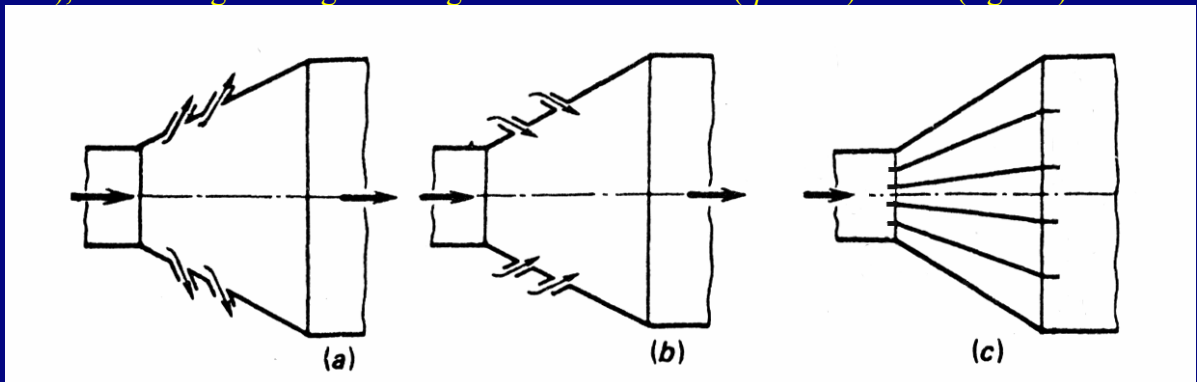


Fig. 3

### Ugelli supersonici reali

In questi condotti le velocità raggiunte sono notevoli, e possono manifestarsi indesiderati effetti bidimensionali legati alla componente trasversale del vettore accelerazione, per le linee di corrente prossime alla parete. Se si tratta, per esempio, di ugelli propulsivi destinati a funzionare anche in atmosfera, oltre alla perdita di spinta legata alla riduzione della componente assiale della velocità rispetto al modulo della stessa, si instaura un nocivo gradiente radiale di pressione, nel senso che la necessaria accelerazione trasversale non può essere fornita alle particelle di gas se non dalla presenza, in un piano normale all'asse del condotto, di una pressione massima al centro, e minima alla parete.

Pertanto un ugello dotato di divergenza rilevante allo sbocco, se progettato in modo da espandere correttamente, cioè da ottenere una pressione all'uscita pari alla pressione esterna, potrebbe produrre in prossimità della parete una pressione del gas espandente decisamente minore della pressione atmosferica, cui conseguirebbe una rovinosa rientrata di aria fredda lungo la parete, fino ad una certa profondità. Le differenze di temperatura al punto di distacco della vena farebbero il resto...

È dunque buona norma ridurre al minimo la divergenza in corrispondenza della sezione d'uscita.

### Ugelli convergenti-divergenti

Un ugello capace di accelerare un fluido comprimibile da velocità basse ( $Ma \ll 1$ ) a velocità supersoniche ( $Ma > 1$ ) deve comprendere un primo tratto convergente, ed un secondo tratto divergente. Fra i due tratti sarà compresa una sezione di gola, cioè una stazione in cui  $\Omega$  è minima, nella quale si instaurerà necessariamente la condizione ( $Ma = 1$ ) di flusso sonico.

Un simile ugello prende il nome di ugello *De Laval*.

### Diffusori supersonici reali

Un diffusore supersonico è chiamato a recuperare energia cinetica fino ad avere in uscita  $Ma < 1$ . In teoria sembrerebbe si potesse costruire anch'esso convergente-divergente, ma la cosa non è banale, per la tendenza all'instaurarsi di onde d'urto, nonché ad instabilità di funzionamento. È necessario ricorrere a forme particolari, la cui trattazione esula dagli scopi del presente corso. Le applicazioni sono limitate alla propulsione, per il volo supersonico ed ipersonico.

## La condizione critica

### Pressione critica

Una situazione singolare è rappresentata dalla condizione di numero di Mach unitario, ed è importante stabilire per quale rapporto  $p/p_t$  questa si verifica.

Dalla (6), posto  $Ma = 1$ , si ricava

$$\frac{2}{k-1} \left( \frac{p_t}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{2}{k-1} + 1$$

quindi, con semplici passaggi

$$\left( \frac{p_t}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 + \frac{k-1}{2}$$

e infine, chiamando *critica* (*cr*) la condizione cercata,

$$\frac{p_{cr}}{p_t} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (13)$$

Il rapporto fra la pressione critica e la pressione di ristagno dipende solo dall'esponente  $k$  dell'isentropica (rapporto dei calori specifici per i gas), ed è indipendente sia dalla temperatura che dalla densità.

	$k$	$p_{cr}/p_t$	$T_{cr}/T_t$
gas monoatomici	1.66	0.488	0.752
aria	1.4	0.528	0.833
vapore surriscaldato	1.3	0.546	0.870
vapore saturo	1.135	0.577	0.937

Tab. 1

I valori del rapporto critico delle pressioni (tab. 1) mutano assai poco in tutto il campo delle possibili variazioni di  $k$ . Il valore di  $k$  diminuisce all'aumentare del numero di atomi nella molecola del gas: anche considerando gas di molecola assai complessa (come ad es. i fluidi organici utilizzati in alcuni impianti motori a vapore), sarebbe comunque  $k > 1$  e  $p_{cr}/p_t < 0.607$ .

### Temperatura critica

Dalla (13) si ricava facilmente il rapporto delle temperature

$$\frac{T_{cr}}{T_t} = \left( \frac{p_{cr}}{p_t} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{2}{k+1} \quad (14)$$

che risulta ovviamente più prossimo all'unità (tab. 1), mostrando però più marcate variazioni percentuali, causa il venir meno dell'effetto compensativo fra il denominatore e l'esponente rilevabile nella (13).

### Velocità critica

Per trovare la velocità che corrisponde a  $Ma = 1$ , basta sostituire l'espressione (13) nell'eq. (4):

$$c_{cr} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} R T_t \left[ 1 - \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \right]} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} R T_t \left( 1 - \frac{2}{k+1} \right)} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} R T_t \frac{k-1}{k+1}} = \sqrt{\frac{2}{k+1} (k R T_t)}$$

Il termine in parentesi tonda nell'ultima espressione trovata rappresenta il quadrato di una velocità sonica, ma rimangono ancora altri termini: la velocità sonica corrisponde infatti alle condizioni di ristagno, e la frazione sotto radice è il rapporto  $T_{cr}/T_t$ , pertanto

$$c_{cr} = \sqrt{\frac{T_{cr}}{T_t} a_t^2} = \sqrt{a_{cr}^2} = a_{cr} \quad (15)$$

risulta verificato che, con le espressioni trovate, la velocità del gas nella condizione definita *critica* è proprio la velocità del suono, ed il numero di Mach è pari all'unità.

## La portata negli ugelli convergenti

### Il rapporto $c/v$

La portata massica in condizioni monodimensionali stazionarie si scrive semplicemente

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = \Omega \frac{c}{v} \quad (16)$$

La (16) può essere utilizzata per risolvere due problemi distinti:

1. calcolare la portata assegnata la geometria del condotto e una terna di condizioni termodinamiche;
2. calcolare le dimensioni del condotto assegnata la portata ed una terna di condizioni termodinamiche.

Nel caso più comune vengono assegnate pressione e temperatura all'ingresso e pressione in uscita.

Il problema, in vista dell'applicazione alle turbomacchine (ed anche ad alcuni componenti rilevanti, come ad es. le valvole di regolazione), viene risolto per flussi adiabatici, studiando dapprima il caso ideale ( $dL_a = 0$ ), e successivamente il caso reale.

Per tutti gli scopi enunciati è necessario studiare preliminarmente la dipendenza del rapporto  $c/v$  dal rapporto  $p/p_t$ .

Utilizzando la (2), e ricordando che  $p v^k = p_t v_t^k = \text{cost}$ , si ricava

$$\frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\frac{2k}{k-1} p_t v_t \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_t} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}}{v_t \left( \frac{p_t}{p} \right)^{\frac{1}{k}}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1}} \sqrt{\frac{p_t v_t}{v_t^2}} \sqrt{\left( \frac{p}{p_t} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p}{p_t} \right)^{\frac{2}{k} + \frac{k-1}{k}}}$$



Tenuto conto dell'equazione di stato

$$pv = RT$$

ed operate le opportune semplificazioni si ottiene

$$\frac{c}{v} = \sqrt{\frac{2k}{k-1}} \sqrt{\frac{p_t}{v_t}} \sqrt{\left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{k+1}{k}}} \quad (17)$$

che può essere messa nella forma, spesso più comoda

$$\frac{c}{v} = \frac{p_t}{\sqrt{RT_t}} \sqrt{\frac{2k}{k-1}} \sqrt{\left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{k+1}{k}}} \quad (18)$$

### La portata massica

La portata massica in una generica sezione, nell'ipotesi strettamente 1D, deriva direttamente dalla (18)

$$\dot{m} = \Omega \frac{p_t}{\sqrt{RT_t}} \sqrt{\frac{2k}{k-1}} \sqrt{\left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{k+1}{k}}} \quad (19)$$

risulta direttamente proporzionale al prodotto  $\Omega p_t$ , e dipende, una volta fissate le proprietà termodinamiche al ristagno, del rapporto  $p/p_t$ , secondo la funzione

$$f\left(\frac{p}{p_t}\right) = \sqrt{\left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{k+1}{k}}} \quad (20)$$

dal momento che la restante parte della (19) comprende solo costanti.

La (20) ha un andamento simile ad una ellisse (fig. 4), e verrà chiamata anche *pseudo-ellisse*.

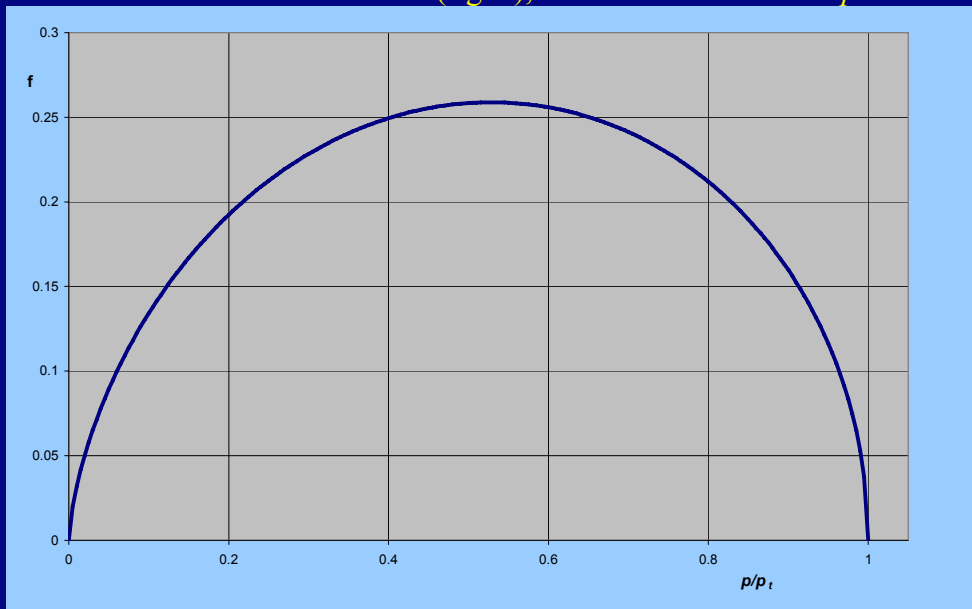


Fig. 4

La (20) è una funzione continua nell'intervallo  $(0 \div 1)$ , sempre positiva, e si annulla agli estremi. Ammette almeno un massimo, che, estraendo  $\Omega$  dalla (19)

$$\Omega = \dot{m} \frac{\sqrt{RT_t}}{p_t} \sqrt{\frac{k-1}{2k}} \frac{1}{f\left(\frac{p}{p_t}\right)}$$

si vede dover corrispondere, una volta fissata la portata e le condizioni di ristagno, al minimo della sezione.

Scrivendo per comodità la derivata di  $f^2$ , il cui massimo coincide ovviamente con quello di  $f$ , si ricava

$$\frac{df^2}{d\left(\frac{p}{p_t}\right)} = \frac{2}{k} \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{2}{k}-1} - \frac{k+1}{k} \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{k+1}{k}-1} = \frac{2}{k} \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{2-k}{k}} - \frac{k+1}{k} \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{1}{k}}$$

cosicché, eguagliando a zero la derivata

$$\left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{1}{k} - \frac{2-k}{k}} = \frac{2}{k} \frac{k}{k+1}$$

si trova che il massimo corrisponde al rapporto di pressioni

$$\frac{p}{p_t} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

che è proprio il rapporto critico definito all'eq. (13): né poteva essere diversamente, come ci si rende conto considerando che in un ugello De Laval in corrispondenza dell'area minima, cioè del passaggio fra il tratto convergente ed il tratto divergente, si deve avere  $Ma = 1$ , e quindi in questa sezione si deve instaurare la pressione critica.

### L'ugello ideale

In un ugello semplicemente convergente ideale non sono presenti dissipazioni ( $dL_a = 0$ ), e quindi la pressione di ristagno  $p_t$  è eguale in tutte le sezioni.

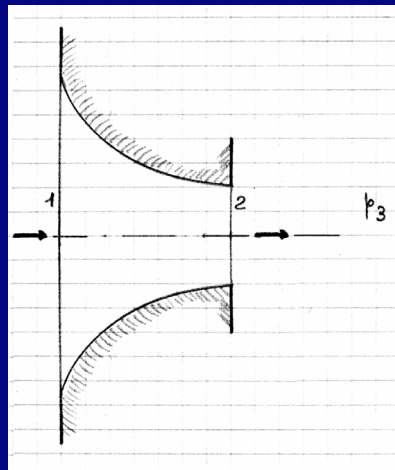


Fig. 5

Sia 1 la sezione di ingresso e 2 la sezione di uscita (fig. 5), mentre si indichi con  $p_3$  la pressione statica che vige nell'ambiente in cui l'ugello scarica.

Finché  $p_3 > p_{cr}$ , il regime di flusso è sicuramente subsonico e, in assenza di forti curvature delle linee di corrente nell'intorno della sezione 2, si può accettare la condizione di congruenza allo sbocco

$$p_2 = p_3$$

condizione che interessa le sole pressioni statiche.

Quando  $p_3 < p_{cr}$ , la pressione  $p_2$  non può scendere sotto il valore critico perché, mancando all'ugello un tratto divergente, è impossibile espandere al suo interno in campo supersonico: in questo caso  $Ma_2 = 1$  e

$$p_2 = p_{cr} > p_3$$

cosicché la successiva espansione fra  $p_{cr}$  e  $p_3$  ha luogo al di fuori dell'ugello, in vena libera.

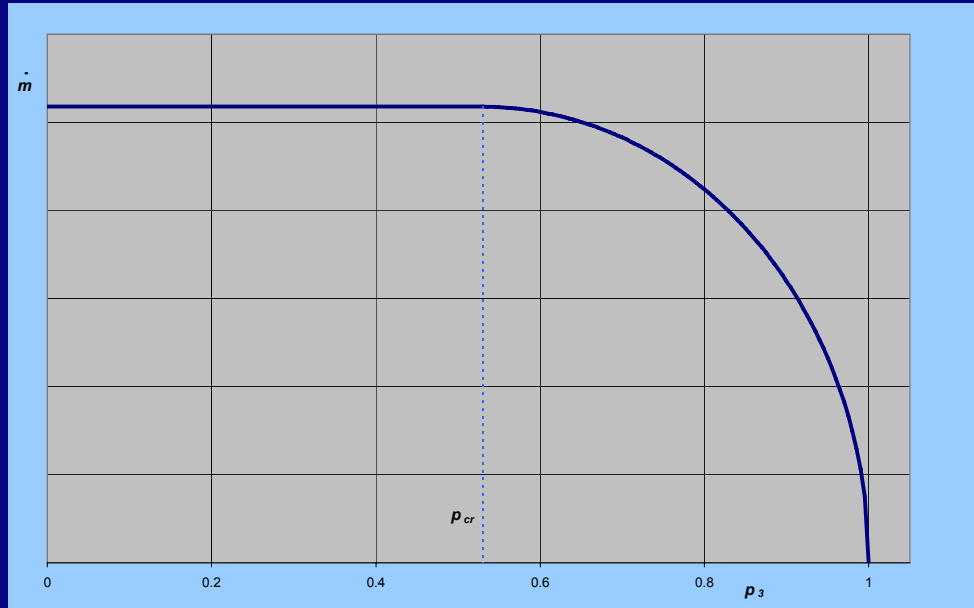


Fig. 6

Il comportamento dell'ugello al variare della pressione  $p_3$  di valle, per valori costanti delle condizioni di monte, è allora rappresentabile in un diagramma  $\dot{m}, p_3$  (fig. 6), che presenta un andamento del tutto analogo a quello della  $f(p/p_t)$  per  $p_3 > p_{cr}$ ; quando invece in 2 si instaura la pressione critica, la portata non risulta più dipendente da  $p_3$ , ma resta bloccata al valore massimo della pseudo-ellisse.

Mentre in idraulica, ad un abbassamento della pressione di valle, corrisponde comunque un incremento di portata, in gasdinamica, raggiunta la condizione sonica, la portata non può più aumentare: si parla allora di **choked flow**, o semplicemente **choking**, termine praticamente intraducibile in italiano (to choke = soffocare).

### La portata critica

Si cerca una espressione compatta della portata massica in condizioni di choking.

Sostituendo la (13) nella (19) si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{m}_{cr} &= \Omega_{cr} \frac{p_t}{\sqrt{RT_t}} \sqrt{\frac{2k}{k-1}} \sqrt{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k-2}{k-1}} - \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k-k+1}{k-1}}} = \Omega_{cr} \frac{p_t}{\sqrt{RT_t}} \sqrt{\frac{2k}{k-1}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1-2}{k-1}}} = \\ &= \Omega_{cr} \frac{p_t}{\sqrt{RT_t}} \sqrt{k} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{2}{k-1} \frac{k+1-2}{k+1}} = \Omega_{cr} \frac{p_t}{\sqrt{RT_t}} \sqrt{k} \sqrt{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}+1}} \end{aligned}$$

ed infine

$$\dot{m}_{cr} = \Omega_{cr} \frac{p_t}{\sqrt{RT_t}} \sqrt{k} \sqrt{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \quad (21)$$

Tenendo conto delle considerazioni svolte sopra, si possono combinare la (19) e la (21) per un ugello convergente ideale, introducendo una funzione di  $\varepsilon = p_3/p_t$ :

$$\dot{m} = \Omega_2 \frac{p_t}{\sqrt{RT_t}} \sqrt{k} F(\varepsilon) \quad (22 a)$$

dove

$$\begin{aligned}
 F(\varepsilon) &= \sqrt{\frac{2}{k-1}} \sqrt{\varepsilon^{\frac{2}{k}} - \varepsilon^{\frac{k+1}{k}}} & \text{per } \varepsilon > \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \\
 F(\varepsilon) &= \sqrt{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}} & \text{per } \varepsilon \leq \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}
 \end{aligned}
 \tag{22 b}$$

Osservazioni:

- siccome l'ugello è convergente, la sezione minima è  $\Omega_2 \equiv \Omega_{cr}$
- nell'ugello ideale non occorre specificare a quale sezione si riferisce  $p_t$  perché  $p_t = \text{cost}$ .

### Ugelli reali e singolarità (valvole, dispositivi di misura a strozzamento, ecc.)

Nell'ugello reale, pur essendo molto ben approssimata la condizione  $T_t = \text{cost}$ , la pressione totale va diminuendo nel senso del moto ( $p_{t2} < p_{t1}$ ). La (22) sarebbe allora esatta, nei limiti dell'ipotesi 1D, ponendo  $\varepsilon = p_3/p_{t2}$ : ma risulta più comodo scrivere l'equazione per  $\varepsilon = p_3/p_{t1}$ , ed introdurre un coefficiente correttivo  $C_d$ , chiamato coefficiente di efflusso (*discharge coefficient*)

$$\dot{m} = C_d \Omega_2 \frac{p_t}{\sqrt{RT_t}} \sqrt{k} F(\varepsilon)
 \tag{23}$$

Il coefficiente di efflusso tiene conto sia della perdita di pressione totale fra le sezioni 1 e 2, sia degli scostamenti del profilo di velocità in 2 dalla condizione 1D. Tali scostamenti sono poco importanti nel caso di ugelli con asse rettilineo, ma predominanti quando la stessa eq. (23) viene applicata a singolarità del circuito quali valvole o dispositivi di misura a strozzamento.

In questi dispositivi, destinati a produrre perdite di carico rilevanti, la dissipazione ha luogo per la maggior parte a valle della sezione ristretta  $\Omega_2$ , per la quale si scrive la (23): la diminuzione di pressione statica fra 1 e 2 è dovuta quasi completamente all'accelerazione del fluido, ma  $C_d$ , per es. nel caso di un diaframma tarato, assume facilmente valori intorno a 0.6, a causa della contrazione della vena.

Il controllo di sonicità, eq. (22 b), a rigore dovrebbe essere eseguito sul rapporto  $p_3/p_{t2}$ , ma nell'incertezza del valore di  $p_{t2}$  si preferisce condurlo su  $\varepsilon = p_3/p_{t1}$ , lasciando eventualmente compensare l'errore che ne deriva al coefficiente  $C_d$ , che può quindi dipendere, oltre che dalla geometria della singolarità e dal numero di Reynolds  $Re$ , anche dal numero di Mach  $Ma$ , che è lo stesso che dire dal rapporto  $\varepsilon$ .